1 Die Riemannsche Vermutung

Geschichte

Die Riemannsche Vermutung wurde erstmals im Jahr 1859 von Bernhard Riemann in seinem Artikel Üeber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"veröffentlicht. Dies war aber nicht die Geburt der mit dieser Vermutung eng verwandten Funktion, der Riemannschen Zeta Funktion. Diese wurde für natürliche Zahlen im 18.Jahrhundert entdeckt.

Definition Die Riemannsche Zeta Funktion ist definiert als

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Über Jahrhunderte hinweg beschäftigte das Problem des Grenzwerts von $\zeta(2)$ viele Mathematiker. Erst Eulers brächtiger mathematischer Verstandt konnte das Problem lösen. Aber Johann Bernulie zeigte einige Jahre zuvor, dass die Reihe konvergiert. Wir wollen Eulers Beweis verstehen, daher schauen wir uns eine Abschätzung des Grenzwertes an.

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = 1.4636111\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} \approx 1.549767731166$$

Der kluge Johann Bernoulie erkannte einen Zusammenhang mit π. Euler verfeinerte den Zusammenhang. Davor werden wir die Konvergenz beweisen.

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + +(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}-\frac{1}{5}) \cdots + (\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1})$$

Da diese Summe eine Teleskopsumme ist kann man alle Summanden zwischen 1 und $\frac{1}{m+1}$ wegstreichen und man erhält $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{m}$. Für $m \to \infty$ ergibt dies 1. Nach dem Maryoanten-Kriterium ergibt dies, dass $\zeta(2)$ konvergiert.

Im ersten Schritt seines Beweises schrieb er die Taylorreihe des Sinus auf:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + - \dots$$

Diese Reihe konvergiert für alle x Werte. Euler interpretierte die linke Seite als Polynom unendlichen Grades, obwohl dies erst 100 Jahre später bewiesen werden konnte. Man muss Euler in seiner Zeit sehen, damals häufig waghalsige Manöver akzeptiert wurden. Nun wieder zum Beweis. Jedes Polynom lässt sich als Produkt von Faktoren schreiben.

$$x(x^2 - \pi^2)(x^2 - 4\pi^2)(x^2 - 9\pi^2) \dots$$

Dies lässt sich umformulieren:

$$Ax(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2})(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}) \cdots .$$

Wegen $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 1$ gilt $A = 1$. Somit haben wir

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = x(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2})(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}).$$

Nun ist das ein Problem einer unendlichen Reihe. Wenn man einen Koeffizientenvergleich durchführt ergibt dies.

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} - \frac{1}{4^2\pi^2} - \dots$$

oder

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

1.0.1 Die Produktdarstellung der Riemannschen Zeta Funktion

Die Riemannsche Zeta Funktion hat eine Produktschreibweise, welche auch von Leonhard Euler geliefert wurde.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{9^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^x} \cdot \zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \frac{1}{12^x} + \cdots$$

$$(1 - \frac{1}{2^x})\zeta(x) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{3^x}(1 - \frac{1}{2^x})\zeta(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{21^x} + \frac{1}{27^x} + \cdots$$

Und so weiter:

$$(1-\frac{1}{3^x})\cdot(1-\frac{1}{2^x})\cdot\zeta(x)=\frac{1}{5^x}+\frac{1}{7^x}+\frac{1}{11^x}+\frac{1}{13^x}+\frac{1}{17^x}+\cdots$$

$$\vdots$$

$$(1-\frac{1}{2^x})\cdot(1-\frac{1}{3^x})\cdot(1-\frac{1}{5^x})\cdot(1-\frac{1}{7^x})\cdots=1$$

$$\zeta(x)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^x})\cdot(1-\frac{1}{3^x})\cdot(1-\frac{1}{5^x})\cdot(1-\frac{1}{7^x})\cdots}$$

$$\zeta(x)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{(1-\frac{1}{p^x})}$$

Dies ist die Eulersche Produktdarstellung der Riemannschen-Zeta-Funktion. Diese gilt für alle Zahlen größer 1.

1.1 Weitere Werte der Riemannschen-Zeta-Funktion

Euler bewies in seinem Buch *Introductio in analysin infinitorum* die Werte der Zeta Funktion für $x=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26$. Zum Beispiel

$$\zeta(4)=\frac{1}{\frac{15}{16}}\cdot\frac{1}{\frac{80}{81}}\cdot\frac{1}{\frac{624}{625}}\cdot\frac{1}{\frac{2400}{2401}}\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Dieses Problem ist sehr schwierig, und wird an Hand folgender dieses Beispieles veranschaulicht:

$$\zeta(26)=\frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26}$$

Im Jahr 1750 veröffentlichte Euler eine Formel für alle geraden Zahlen:

$$\zeta(2n)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r^{2n}}=(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$$

, wobei B_{2n} die zwei n-ste Bernoulli Zahl ist. Die häufigste Definition der Bernoulli Zahl lautet:

$$\frac{x}{e^x-1}=(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$$

Was ist mit den ungeraden Zahlen?
Für diese gibt weder Formeln noch kennt man die Grenzwerte, aber Abschätzungen sind möglich:

$$\zeta(3)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots=1,2020569031\ldots$$

$$\zeta(5)=1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\cdots=1,0369277551\ldots$$

$$\zeta(7) = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \cdots = 1,0083492773\ldots$$

$\zeta(3)$ ist eine Konstante mit dem Namen Äperysche-Konstante". Diese ist nach französischen Amathematiker Roger Apery bennant, welcher bewies, dass die Zahl von $\zeta(3)$ irrational ist. Von den beiden anderen Zahlen ist noch nicht einmal dies bewiesen!

1.2 Die Riemannsche Zeta Funktion für komplexe Zahlen

Da wir zuerst nur komplexe Zahlen mit $x > 1$ betrachten, können wir statt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^s}|$ schreiben, wobei $s = x + yi$

$$|\frac{1}{n^s}| = |\frac{1}{n^{x+yi}}| = |\frac{1}{n^x} \cdot \frac{1}{n^{yi}}| = |\frac{1}{n^x}| e^{-iy\ln(n)} = |\frac{1}{n^x}| \cdot \sqrt{\cos^2(y\ln(n)) + \sin^2(y\ln(n))}$$

Der zweite Teil ist 1, daher folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

1.2.1 Die Dirichlet Reihen

Dirichlet Reihen sind Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

a_n ist eine beliebige komplexe Zahl und λ_n ist eine reele Reihe, welche erfüllt:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots > \infty$$

Wenn $\lambda_n = n$ ergibt dies

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad z = e^{-s}$$

Falls $\lambda_n = \log(n)$ dann ergibt dies

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

So ist $\zeta(n)$ die einfachste Form einer Dirichlet Reihe.

In der Mathematik geht es immer um die Darstellung von Zusammenhängen. Wir haben schon in dem Teil der Collatz-Vermutung kurz über Dirichlet Reihen geredet. Und zwar über die Lösungen einer Dirichlet Reihe. In der Riemannchen Vermutung geht es um dasselbe.

1.3 Die Riemannsche Vermutung

Die Riemannsche Vermutung bedeutet: alle Nullstellen der Riemannsche Zeta Funktion liegen auf dem Kritischen Streifen $\frac{1}{2}$.

1.3.1 Die Nullstellen der Riemannsche Zeta Funktion

Für alle $n > 1$ ist $\zeta(n) \neq 0$. Dies folgt aus $\zeta(n) = \sum_{n \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^n}}$. Denn kein Faktor dieses Produnkts kann 0 sein. Gilt dies auch für $Re(1-n) < 1$?. Dazu betrachten wir die Funktionalgleichung der Riemannschen-Zeta Funktion. Diese ist definiert als

$$\zeta(n) = \pi^{-n} \cdot 2^{1-n} \cdot \Gamma(n) \cdot \cos(\frac{\pi n}{2}) \cdot \zeta(n)$$

Mit $n > 1$ $\Gamma(n)$ ist als $\lim_{z \to \infty} \frac{n! \cdot z^n}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdots (n+z)}$ definiert. Da wir in diesem Fall nur $n > 1$ betrachten, folgt aus dem ersten Beweis, dass $\zeta(n)$ nicht 1 sein kann. Bei $\pi^{-n} \cdot 2^{1-n}$ ist es ähnlich. Da keiner der beiden Faktoren 0 ist, kann dies auch keine Nullstelle erzeugen. Es bleibt nur $\cos(\frac{\pi n}{2})$ übrig. Wir schauen uns den komplexen Cosinus an. Die Nullstelen sind definiert als $\cos(n) = 0 \Rightarrow z_k = \frac{2k+1}{2}\pi \in \mathbb{R} \quad \cos(\frac{n \cdot \pi}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{\pi \cdot z_k}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi \Rightarrow z_k = 2k+1 \ \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \zeta(1-z_k) = \zeta(1-(2k+1)) = \zeta(2k) \Rightarrow Re(1-z_k) = Re(-2k) < k \in \mathbb{N}$ Also gibt es Nullstellen für alle negativen Produkte von 2. Damit will ich abschließen.

Quellen:

THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION(E.C. Titchmarsh, Oxford, 1951)

GAMMA EULERS KONSTANTE,PRIMZAHLEN UND DIE RIEMANNSCHE VERMUTUNG(Julian Havil, aus dem Englischen von Manfred Stern, Princton University Press,2003

Riemann´sche Zeta Funktion(Tobias Kietreiber)

Funktiontheorie 1(E.Freitag, R.Busam,Springer Berlin Heidelberg New York,1993)

Riemann´s Zeta Function(H.M. Edwards, New York, 1974)