Drei ungelöste mathematische Probleme

Anton Bogner

1 Die Collatz Vermutung

Es gibt zwar keine schriftlichen Zeugnisse, aber Mathematikhistoriker schätzen, dass Lother Collatz in den 1930er Jahren diese Vermutung aufgestellt hat. Im Jahr 1971 wurde diese Vermutung das erste Mal in gedruckter Version von einem im Jahr 1970 gehaltenen Vortrag veröffentlicht. Der Mathematiker Riho Terras hat im Jahr 1976 den ersten Fachartikel zur Collatz-Vermutung geschrieben. Terras zeigte mit der probabilistischen Methode, dass $\mathrm{Col}^{\mathbb{N}}_{min}(n) < n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. 2019 hatte Terence Tao bewiesen, dass das Collatz-Problem für fast alle natürlichen Zahlen gilt. Seit 2021 sind 120.000.000 Yen oder umgerechnet 920.000 € auf die Lösung des Problems ausgeschrieben. Die Collatz Funktion und die Collatz Vermutung sind fest mit einander verwoben.

1.1 Definition und Vermutung

Die Collatz-Funktion ist wie folgt definiert:

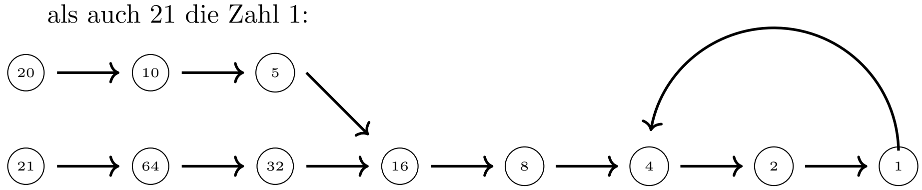
$$\mathrm{Col} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \; n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Col}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ wenn } 2|n \\ 3n + 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Dazu definieren wir den Collatz-Orbit $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Col}^{\mathrm{k}}(n) = \begin{cases} n \; falls \; k = 0 \\ \mathrm{Col} \;\; falls \; k = 1 \\ \mathrm{Col}(\mathrm{Col}^{\text{k-1}}) \;\; falls \; k > 1 \end{cases}$$

Dann lautet die Vermutung: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein k so, dass $\mathrm{Col}^{\mathrm{k}}(\mathrm{n}) = 1$

Zum Beispiel enthält der Collatzorbit von 20
als auch 21 die Zahl 1:



1.2 Auf der Suche nach der Collatz-Funktion

Als erstes definieren wir das wichtigste Objekt der Collatz-Vermutung. Den Kreis. Dieser ist eine sich immer wiederholende Reihe an Zahlen, welcher mit Hilfe einer Collatz-Funktion erzeugt wird. Der Collatz-Graph einer gegeben Funktion $\mathrm{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist ein gerichteter Graph mit den natürlichen Zahlen als Knotenmenge. Die einfachste Funktion mit Collatzgraph ist die Nachfolger-Funktion $\mathrm{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\mathrm{s(n)} = n + 1$ deren Collatz-Graph aus unendlich vielen Knoten besteht. Die natürlichen Zahlen sind in diesem Fall wie auf eine Kette aufgereiht.

1.2.1 Die Funktion C_1

Collatz suchte nach einer Funktion, die einen Kreis in sich enthält. Er fand folgende Funktion:

$$\mathrm{C}_1(\mathrm{n}) := \begin{cases} \frac{n}{2} \; falls \; n \; gerade \\ n+1 \; falls \; n \; ungerade \end{cases}$$

Der Collatz-Graph dieser Funktion hat natürlichen Zahlen als Knoten. Nehme man den Knoten k. Wäre er gerade dann hätte er zwei Vorgängerknoten, und zwar $k-1$ und $2k$. Wäre er nicht gerade dann hätte er den Vorgängerknoten $2k$. Weiters schließt man:

$$\mathrm{C}_1^2(\mathrm{n}) = \mathrm{C}_1(\mathrm{C}_1(\mathrm{n}) := \begin{cases} \frac{n}{4} \text{ falls n durch 4 teilbar ist} \\ \frac{n}{2}+1 \text{ falls n durch 2 und 4 teilbar ist} \\ \frac{n+1}{2} \text{ falls n durch 2 aber nicht durch 4 teilbar ist} \end{cases}$$

Daraus folgt: $\mathrm{C}_1^2(n) < n \quad \forall n > 2$. Dies hat zur Folge, dass C_1 nur den Kreis (1,2) besitzt und dass jede C_1-Trajektorie jeder Zahl in diesem Kreis endet.

1.2.2 Die Collatzfunktion C_3

Weil dieses Argument ziemlich einfach war, suchte er weiter und fand

$$\mathrm{C}_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \mathrm{C}_3(n) = \mathrm{Col}(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} \; falls \; n \; gerade \\ 3n+1 \; falls \; n \; ungerade \end{cases}$$

Der triviale Kreis dieser Funktion ist $(1, 2, 4)$. Collatz veröffentlichte seine Arbeit nicht, denn er hatte keinen Beweis, dass $(1, 2, 4)$ der einzige Kreis auf $\mathbb{N}$ sei. In graphentheoretischer Hinsicht bedeutet die Collatz-Vermutung, dass der Collatz-Graph und die Collatz-Funktion zusammenhängend sind, dass also alle Trajektionen von natürlichen Zahlen in diesem Kreis enden.

1.2.3 Überlegungen zu C_5

Definition:

$$\mathrm{C}_5(\mathrm{n}) := \begin{cases} \frac{n}{2} \; falls \; n \; gerade \\ 5n+1 \; falls \; n \; ungerade \end{cases}$$

Wie man schnell erkennt, gibt es den Kreis:

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 16 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1 \arrow[llllll, bend right] \end{tikzcd}$$

Aber nach kurzem Rechnen ergibt sich, dass dies nicht der einzige Kreis sein kann. Zum Beispiel enthält folgender Orbit nicht die 1:

$$C_5^{\mathbb{N}}(26) = (26, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26, 13, \ldots)$$

Ein Kreis ist nicht trivial, wenn er keine 1 beinhaltet. Aber gibt es Zahlen die niemals einen Kreis finden?

1.2.4 Weitere verwandte Vermutungen und Funktionen

Falls man $3n + 1$ durch $3n - 1$ ersetzt, ändert sich die Vermutung zu:

1. $T_-^k(n)$ kommt in den Kreis (1,2)
2. $T_-^k(n)$ kommt in den Kreis (5,7,10)
3. $T_-^k(n)$ kommt in den Kreis (17,25,37,55,82,41,61,91,168,68,34)

Auch die so genannte $3n - 1$ Vermutung ist bislang ungelöst.

1.2.5 Die generelle Collatz-Funktion

$$T_q(n)\ \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad T_q(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}\ falls\ n\ gerade \\ \frac{(qn+1)}{2}\ falls\ n\ ungerade \end{cases}$$

Zachary Franco und Carl Pomerence zeigten, dass für jedes q, welches eine Wieferich Zahl ist $T_q^k(n) \neq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ gilt.

Sie benutzten folgende Definition:
Eine Zahl ist eine Wieferich Zahl wenn sie die Gleichung $2^{\ell(q)} \equiv 1\ mod\ q^2$ erfüllt wobei $\ell(q)$ die Ordnung von 2 in der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ ist.

1.3 Lösungsmöglichkeiten für unterschiedliche Startpunkte der Collatzfunktion

1. $C^k(n)$ geht gegen ∞
2. $C(n)$ bildet einen nicht-trivialen Kreis
3. $C(n)$ endet im trivialen Kreis mit 1

Am einfachsten kann der dritte Lösungsweg dargestellt werden. Es gibt einen stochastischen Ansatz für das Problem, der wie folgt lautet:

Vorraussetzung ist, dass ungerade und gerade Zahlen gleichhäufig vorkommen. Bei dem Schritt von $C^k(n)$ zu $C^{k+1}(n)$ ist es entscheidend, ob n gerade oder ungerade ist. Da $\frac{n}{2}$ häufiger durchgeführt wird, sollte das Ergebnis immer näher gegen 1 gehen.

Das ist zwar kein Beweis, aber es ist hilfreich darüber nach zu denken. Der Mathematiker Terence Tao fand im Jahr 2019 einen Teilbeweis für die Vermutung, der auf der Syracuse-Funktion aufbaute.

1.4 Ergebnisse zu 5n+1

Zuerst führen wir ein wichtiges Objekt in der Untersuchug von Kreisen ein. Der Begriff „Leitung“ aus dem Englischen "circuit"verwendet. Eine Leitung ist ein

$$(n \xrightarrow{k} m \xrightarrow{l} n^*) := (n, C_q(n), \ldots, C_q^k(n) = m, C_q(m), \ldots, C_q^l(m) = n^*)$$

Vorrausgestzt:

$$n < C_q(n) < \cdots C_q^k(n) < m > C_q(m) > \cdots > C_q^l(m) = n^* \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Dazu definieren wir noch die Leitungskreise, welche Kreise sind, die eine Leitung sind. J.L Davision leitete von dieser Definition ab, dass die Formel $2^k(m+1) = 3^k(n+1)$ stimmen muss und dass dann auch $n^* = m/2^l$ gelten muss. Dies benutzte er im Zusammenhang mit Diophantischen Gleichungen.

Theorem (J.L. Davison) Es gibt einen direkten Zusammenhang zwischen $qn+1$ (in Abschnitt 1.2.5 definiert), Leitungskreisen und Tripeln $(k, l, h) \in \mathbb{N}^3$, welche die Gleichung

$$(2^{k+l} - 3^k)h = 2^l - 1 \qquad (1)$$

erfüllen.

Im Jahr 1978 bewies R.P. Steiner, dass nur das Triple $(k, \ell, h) = (1, 1, 1)$ die Gleichung (1) löst. Dazu nutzte er ein Lemma von A.Baker über lineare Formen, Logarithmen und Kettenbrüchen. Dies hat auch Auswirkungen auf das $3n+1$ Problem. Es zeigt, dass (1,2) der einzige Leitungskreis ist. Durch die Anwendung der benutzten Methode bewies R.P Steiner, dass $13 \xrightarrow{3} 208 \xrightarrow{4} 13$ der einzige nicht triviale Leitungskreis von $T_5(n)$ ist.

1.5 Die g(n) Funktion und Vermutung

In sein Notizbuch schrieb Collatz die Funktion

$$T(n) := \begin{cases} \frac{2}{3}n \; falls \; n \equiv 0 \mod 3 \\ \frac{4}{3}n - \frac{1}{3} \; falls \; n \equiv 1 \mod 3 \\ \frac{4}{3}n + \frac{1}{3} \; falls \; n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Diese erzeugt die Kreise (1), $(2, 3)$ und $(4, 5, 7, 9, 6)$. Es gibt aber eine Frage: Geht die Trajektorie $(8, 11, 15, 10, 13, 17, 23, 31, 41, 55, 73, 97, 129, 86, 115, \ldots)$ gegen unendlich oder kommt sie in einen Kreis?

Definition. Für $q \geqslant 2$ ist eine ganze Zahl und $a_0, \ldots a_{p-1}, b_0, \ldots b_{p-1}$ rationale Zahlen sind welche die Vorschrift

$$a_j p + b_j, b_j j + b_j \in \mathbb{Z} \; j = 0, \ldots, p-1$$

erfüllt. Dann ist eine periodische lineare Funktion gegeben als:

$$U : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \;\; U(n) := a_j n + b_j \; wenn \; n \equiv j \mod p$$

Sogar der große John Conway beschäftigte sich mit dieser Funktion und zehn Jahre lang wurden diese Funktionen mit dem Name "$Collatz-likefunktions$" benannt.

Quellen:

1. *Günther J. Wirsching* (1998) The Dynamical System Generated by the 3n+1 Function Heidelberg

2. https://www.youtube.com/watch?v=tl-BdWrffBM

3. https://www.dcode.fr/collatz-conjecture

4. https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/collatz-vermutung-deutscher-mathematiker-meldet-loesung-fuer-zahlenraetsel-a-766643.html

5.https://de.wikipedia.org/wiki/Collatz-Problem